

**FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH**  
**Zentralinstitut für Angewandte Mathematik**  
**D-52425 Jülich, Tel. (02461) 61-6402**

Interner Bericht

**Vorkonditionierung des  
parallelen Schwarz–Verfahrens zur Lösung  
parabolischer Differentialgleichungen**

*Manfred Sauren, Rainer von Seggern*

KFA-ZAM-IB-9615

Juni 1996  
(Stand 18.06.96)



# Vorkonditionierung des parallelen Schwarz–Verfahrens zur Lösung parabolischer Differentialgleichungen

Manfred Sauren und Rainer von Seggern

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik  
Forschungszentrum Jülich GmbH (KFA), 52425 Jülich

18. Juni 1996

## Zusammenfassung

The parallel Schwarz method is an important algorithm for the numerical solution of partial differential equations on parallel computers. This method allows on the individual nodes of the parallel computer the usage of well-established sequential software and provides a general framework that can be implemented easily. The fundamental idea leading to an acceleration of the convergence is to proceed in a block Jacobi-like manner at the endpoints of the overlapping intervals. As will be illustrated, the resulting algorithm can be implemented equally easily. The acceleration of the convergence is proven for the one-dimensional heat equation and it is illustrated that for small overlap the convergence rate exceeds that of the classical Schwarz alternating method. Moreover, the equivalence of the derived algorithm and the generalized Schwarz method is shown, leading to a better understanding and handling of the latter method.

## 1 Einleitung

Das numerische Lösen von partiellen Differentialgleichungen ist eine der wichtigsten Aufgaben des wissenschaftlichen Rechnens und stellt wegen der Größe der auftretenden Gleichungssysteme besondere Anforderungen sowohl an die Algorithmen als auch an die Rechnerarchitektur. Insbesondere der Einsatz von Parallelrechnern und damit von parallelen Algorithmen hat in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen. Viele Parallelisierungsansätze zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen basieren auf einer Zerlegung des zugrunde gelegten räumlichen Gebietes (*Domain Decomposition*), bei der dann Teilprobleme auf Teilgebieten parallel gelöst werden können. Einen Überblick über die Entwicklung auf diesem Gebiet geben die sieben Tagungsbände über Gebietszerlegungsmethoden [13, 6, 7, 14, 18, 22, 19]. Diese Methoden haben ihren Ursprung im sogenannten alternierenden Schwarz–Verfahren, das vor mehr als 120 Jahren von Hermann A. Schwarz [23] eingeführt wurde, um die vorhandene Existenztheorie gewisser partieller Differentialgleichungen auf allgemeinere Gebiete übertragen zu können. Hierbei wird jedem Prozessor ein Teilgebiet zugeordnet, auf dem ein Teilproblem gelöst wird. Durch einen iterativen Prozeß erhält

man schließlich die Lösung des Gesamtproblems. Die parallele Variante dieser Methode [20] erzwingt genau wie ihr Original die Konvergenz durch Überlappung der Teilgebiete. Während die Vorteile des parallelen Schwarz–Verfahrens vor allem darin liegen, daß für jedes Teilproblem etablierte sequentielle Software eingesetzt werden kann und nur benachbarte Gebiete Daten austauschen müssen, liegt der Hauptnachteil in der schlechten Konvergenz der Verfahren insbesondere bei kleinen Überlappungen. Zur Konvergenzbeschleunigung werden in der Literatur unter anderem Grobgitterkorrekturen [4, 5, 8, 10] und Multilevelmethoden [2, 15] beschrieben. Durch Verwendung dieser Techniken wird die lokale Kommunikationsstruktur jedoch durch ein globales Kommunikationsschema ersetzt, was beim Einsatz von Parallelrechnern zu deutlichen Effizienzverlusten führen kann.

In diesem Bericht werden Beschleunigungen des parallelen Schwarz–Verfahrens vorgestellt, die die lokale Kommunikationsstruktur dieses Verfahrens erhalten. Für diese Untersuchungen betrachten wir lineare parabolische Differentialgleichungen der Form

$$u_t = \tilde{L}(u) + g \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{für } n \in \{1, 2, 3\} \quad \text{und } t \geq 0.$$

Eine Diskretisierung bezüglich der Zeit liefert für jeden Zeitschritt  $h$  eine im allgemeinen elliptische Differentialgleichung, die insbesondere für das semidiskrete Crank–Nicolson–Verfahren durch

$$u(x, t+h) - \frac{h}{2} \tilde{L}(u)(x, t+h) = u(x, t) + \frac{h}{2} \left( \tilde{L}(u)(x, t) + g(x, t+h) + g(x, t) \right)$$

gegeben ist. Im eindimensionalen Fall  $x \in (a, b)$  und  $t \geq 0$  kann man die allgemeine Lösung dieser jetzt gewöhnlichen Differentialgleichung  $L(y) = f$  z.B. mit den beiden Randwerten als Integrationskonstanten mit Hilfe der Greenschen Funktion in geschlossener Form angeben. Durch Kenntnis dieser allgemeinen Lösung in jedem überlappenden Teilintervall läßt sich ein Gleichungssystem nur für die unbekannten Werte der Lösung in den Randpunkten der Teilintervalle aufstellen. Das parallele Schwarz–Verfahren kann dann durch das Jacobi–Verfahren zur Lösung dieses Gleichungssystems charakterisiert werden.

Abschließend geben wir einen Überblick über den Inhalt der folgenden Abschnitte. Zunächst wird gezeigt, wie das oben eingeführte Jacobi–Verfahren durch verschiedene Vorkonditionierungen beschleunigt werden kann. Der wesentliche Grundgedanke dieser Vorgehensweise ist die Interpretation der Vorkonditionierung als gekoppelte Randbedingungen für die Differentialgleichungen in den Teilgebieten.

Für die Wärmeleitungsgleichung  $u_t = u_{xx} + g$  erhält man mit dem semidiskreten Crank–Nicolson–Verfahren die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(x) - \kappa^2 y(x) = f(x) \quad \text{für } y(x) = u(x, t+h)$$

mit  $\kappa = \sqrt{2/h}$  und  $f(x) = -u_{xx}(x, t) - \kappa^2 u(x, t) - (g(x, t+h) + g(x, t))$  für die Ergebnisse im Abschnitt 3 angegeben werden. Da die Konvergenzgeschwindigkeit monoton mit  $\kappa$  wächst, wird auf den Spezialfall  $\kappa = 0$  gesondert eingegangen. Im Abschnitt 4 werden allgemeinere Beschleunigungen des Jacobi–Verfahrens betrachtet, die die besondere Struktur des Gleichungssystems weiter ausnutzen. Im Abschnitt 5 wird schließlich der Zusammenhang mit dem verallgemeinerten Schwarz–Verfahren [11, 21, 24, 25] hergeleitet und der Bericht mit einem Ausblick auf mehrdimensionale Probleme abgeschlossen.

## 2 Das parallele explizite Verfahren

In diesem Abschnitt wird das klassische alternierende Schwarz–Verfahren [23] zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$L(y) = f \text{ in } (a, b) \quad \text{mit } y(a) = y(b) = 0 \quad (1)$$

auf  $p$  sich überlappende Teilintervalle verallgemeinert. Dafür erweist sich folgende Definition als zweckmäßig.

**Definition 1.** Eine Zerlegung  $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, p\}$  des Intervalls  $(a, b)$  heißt  $p$ –überlappend, falls

$$a_1 = a, b_p = b \text{ und } a_i < a_{i+1} < b_i < b_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, p-1.$$

Diese Zerlegung heißt  $(\varepsilon, p)$ –überlappend, falls zusätzlich

$$b_i - a_{i+1} = \varepsilon \quad \text{für } i = 1, \dots, p-1.$$

Eine Zerlegung heißt gleichmäßig, falls alle Teilintervalle  $(a_i, b_i)$  gleich lang sind.

Zu einer gegebenen  $p$ –überlappenden Zerlegung von  $(a, b)$  löst das alternierende Schwarz–Verfahren (AS) die Randwertaufgabe (1) durch Aufteilung des Gesamtproblems in  $p$  Teilprobleme auf den Teilintervallen  $(a_i, b_i)$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  stellt das alternierende Schwarz–Verfahren ein Iterationsverfahren dar, dessen Lösungen des  $i$ -ten Teilproblems  $y_i^{(n)}$  in Einzelschritten der Form

$$\left\{ \begin{array}{l} L(y_i^{(n+1)}) = f \text{ in } (a_i, b_i) \\ y_i^{(n+1)}(a_i) = y_{i-1}^{(n+1)}(a_i) \\ y_i^{(n+1)}(b_i) = y_{i+1}^{(n)}(b_i) \end{array} \right\} \quad (\text{AS})$$

für  $i = 1, \dots, p$  berechnet werden, wobei  $y_0^{(n)}(a_1) = y_{p+1}^{(n)}(b_p) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gesetzt wird. Eine parallele Variante [20], die im weiteren untersucht werden soll, kann folgendermaßen formuliert werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} L(y_i^{(n+1)}) = f \text{ in } (a_i, b_i) \\ y_i^{(n+1)}(a_i) = y_{i-1}^{(n)}(a_i) \\ y_i^{(n+1)}(b_i) = y_{i+1}^{(n)}(b_i) \\ \text{für } i = 1, \dots, p \end{array} \right\} \quad (\text{PS})$$

mit  $y_0^{(n)}(a_1) = y_{p+1}^{(n)}(b_p) = 0$ . In diesem Fall werden alle Teilprobleme gleichzeitig in einem *Gesamtschritt* gelöst. Für einen Parallelrechner bedeutet dies, daß die  $p$  Teilprobleme auf  $p$  Prozessoren gelöst werden können. Darüber hinaus kann für jedes Teilproblem ein vorhandenes sequentielles Programm eingesetzt werden. Die Kommunikation der einzelnen Prozessoren besteht hier lediglich aus dem Austausch der verschiedenen Randwerte, so daß eine Implementierung besonders einfach ist. Ein Nachteil dieses parallelen Verfahrens ist jedoch seine langsame Konvergenz. Um Varianten einführen zu können, die schneller konvergieren, benötigen wir die Darstellung

in Matrizenform. Sei hierfür der Differentialoperator  $L$  so gewählt, daß Lösungen von  $L(y) = f$  in  $(a_i, b_i)$  mit Dirichlet-Randbedingungen existieren und eindeutig sind. Wir bezeichnen insbesondere mit

$$\begin{aligned}\varphi_i &: \text{Lösung der DGI } L(y) = 0 \text{ in } (a_i, b_i) \text{ mit } y(a_i) = 1 \text{ und } y(b_i) = 0, \\ \psi_i &: \text{Lösung der DGI } L(y) = 0 \text{ in } (a_i, b_i) \text{ mit } y(a_i) = 0 \text{ und } y(b_i) = 1, \\ h_i &: \text{Lösung der DGI } L(y) = f \text{ in } (a_i, b_i) \text{ mit } y(a_i) = y(b_i) = 0,\end{aligned}\quad (2)$$

so daß die Lösung von  $L(y_i) = f$  in  $(a_i, b_i)$  mit den Randwerten  $y_i(a_i)$  und  $y_i(b_i)$  durch

$$y_i(x) = h_i(x) + \varphi_i(x)y_i(a_i) + \psi_i(x)y_i(b_i) \quad \text{für } x \in [a_i, b_i] \quad (3)$$

gegeben ist. Das parallele Schwarz-Verfahren läßt sich allein für die auszutauschenden Randwerte formulieren, falls man beachtet, daß sich die Werte an den Rändern  $a$  und  $b$  nicht ändern, also

$$\begin{cases} y_i^{(n+1)}(b_i) &= y_{i+1}^{(n)}(b_i) \\ y_{i+1}^{(n+1)}(a_{i+1}) &= y_i^{(n)}(a_{i+1}) \end{cases}, i = 1, \dots, p-1. \quad (4)$$

Da  $y_{i+1}^{(n)}$  die Lösung von  $L(y) = f$  im Intervall  $(a_{i+1}, b_{i+1})$  mit den Randwerten  $y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1})$  und  $y_{i+1}^{(n)}(b_{i+1})$  ist, ergibt sich mit Hilfe von (3)

$$y_{i+1}^{(n)}(b_i) = h_{i+1}(b_i) + \varphi_{i+1}(b_i)y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}) + \psi_{i+1}(b_i)y_{i+1}^{(n)}(b_{i+1}). \quad (5)$$

Entsprechend erhält man

$$y_i^{(n)}(a_{i+1}) = h_i(a_{i+1}) + \varphi_i(a_{i+1})y_i^{(n)}(a_i) + \psi_i(a_{i+1})y_i^{(n)}(b_i). \quad (6)$$

Setzen wir für  $i = 1, \dots, p-1$

$$u_i := \begin{pmatrix} y_i(b_i) \\ y_{i+1}(a_{i+1}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_i := \begin{pmatrix} h_{i+1}(b_i) \\ h_i(a_{i+1}) \end{pmatrix}$$

und

$$D_i := \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_{i+1}(b_i) \\ -\psi_i(a_{i+1}) & 1 \end{pmatrix}, \quad L_i := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varphi_{i+1}(a_{i+2}) \end{pmatrix}, \quad R_i := \begin{pmatrix} -\psi_i(b_{i-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so können die Gleichungen (5) und (6) zusammengefaßt werden zu

$$\begin{pmatrix} y_{i+1}(b_i) \\ y_i(a_{i+1}) \end{pmatrix}^{(n)} = \tilde{f}_i + (I - D_i)u_i^{(n)} - L_{i-1}u_{i-1}^{(n)} - R_{i+1}u_{i+1}^{(n)}, \quad (7)$$

wobei  $L_0$  und  $R_p$  entsprechende Nullmatrizen bezeichnen. Somit ergibt sich aus (4) das Iterationsverfahren

$$u_i^{(n+1)} = \tilde{f}_i + (I - D_i)u_i^{(n)} - L_{i-1}u_{i-1}^{(n)} - R_{i+1}u_{i+1}^{(n)}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$u := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{p-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} := \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{p-1} \end{pmatrix}$$

und

$$A := \begin{pmatrix} D_1 & R_2 & & & \\ L_1 & D_2 & R_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & L_{p-3} & D_{p-2} & R_{p-1} \\ & & & L_{p-2} & D_{p-1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

ist (7) äquivalent zu

$$u^{(n+1)} = \tilde{f} + u^{(n)} - Au^{(n)} = \tilde{f} + (I - A)u^{(n)}$$

mit der Iterationsmatrix

$$I - A.$$

Dieses ist das Jacobi-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems  $Au = \tilde{f}$ , dessen Lösung durch  $u = (y(b_1), y(a_2), \dots, y(b_{p-1}), y(a_p))^T$  gegeben ist, so daß im Fall der Konvergenz des Jacobi-Verfahrens die Iterierten  $u^{(n)}$  gegen die exakte Lösung konvergieren. Da die Matrix  $A$  blocktridiagonal ist, lautet das zugehörige Block-Jacobi-Verfahren

$$D_i u_i^{(n+1)} = \tilde{f}_i - L_{i-1} u_{i-1}^{(n)} - R_{i+1} u_{i+1}^{(n)},$$

bzw. kompakter, falls

$$D_A := \text{diag}(D_1, \dots, D_{p-1}) \quad (9)$$

gesetzt wird,

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + D_A^{-1} (\tilde{f} - Au^{(n)}).$$

Für diesen Fall lautet die Iterationsmatrix

$$I - D_A^{-1} A.$$

Ersetzt man die Matrix  $D_A^{-1}$  durch  $K := \text{diag}(K_1, \dots, K_{p-1})$  mit regulären Matrizen

$$K_i := \begin{pmatrix} \mu_i & \alpha_i \\ \beta_{i+1} & \nu_{i+1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

erhält man das Richardson-Verfahren zur Lösung des vorkonditionierten Gleichungssystem  $KAu = K\tilde{f}$ , also

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + K (\tilde{f} - Au^{(n)})$$

mit der Iterationsmatrix

$$I - KA.$$

Für die einzelnen Blöcke erhält man hieraus

$$\begin{aligned} u_i^{(n+1)} &= u_i^{(n)} + K_i (\tilde{f}_i - D_i u_i^{(n)} - L_{i-1} u_{i-1}^{(n)} - R_{i+1} u_{i+1}^{(n)}) \\ &= u_i^{(n)} + K_i (\tilde{f}_i + (I - D_i) u_i^{(n)} - L_{i-1} u_{i-1}^{(n)} - R_{i+1} u_{i+1}^{(n)}) - K_i u_i^{(n)}. \end{aligned}$$

Mit (7) und der Definition von  $u_i$  gilt schließlich

$$\begin{pmatrix} y_i(b_i) \\ y_{i+1}(a_{i+1}) \end{pmatrix}^{(n+1)} = (I - K_i) \begin{pmatrix} y_i(b_i) \\ y_{i+1}(a_{i+1}) \end{pmatrix}^{(n)} + K_i \begin{pmatrix} y_{i+1}(b_i) \\ y_i(a_{i+1}) \end{pmatrix}^{(n)}.$$

Wir erhalten so das **vorkonditionierte explizite parallele Schwarz–Verfahren**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L \left( y_i^{(n+1)} \right) & = & f \quad \text{in } (a_i, b_i) \\ y_i^{(n+1)}(a_i) & = & y_i^{(n)}(a_i) + \nu_i \left[ y_{i-1}^{(n)}(a_i) - y_i^{(n)}(a_i) \right] \\ & & + \beta_i \left[ y_i^{(n)}(b_{i-1}) - y_{i-1}^{(n)}(b_{i-1}) \right] \\ y_i^{(n+1)}(b_i) & = & y_i^{(n)}(b_i) + \mu_i \left[ y_{i+1}^{(n)}(b_i) - y_i^{(n)}(b_i) \right] \\ & & + \alpha_i \left[ y_i^{(n)}(a_{i+1}) - y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}) \right] \\ & \text{für } i = 1, \dots, p \end{array} \right\} \quad (\mathbf{KEPS}),$$

wobei  $\nu_1 = \beta_1 = \mu_p = \alpha_p = 0$  und  $y_1^{(n)}(a_1) = y_p^{(n)}(b_p) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man beachte, daß der Kommunikationsaufwand bei der Implementierung von KEPS gegenüber der Methode PS nicht steigt. Es werden lediglich Linearkombinationen der verschiedenen Randwerte ausgetauscht.

Im weiteren soll das vorkonditionierte parallele Schwarz–Verfahren für die Blöcke  $K_i = D_i^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ , mit dem parallelen Schwarz–Verfahren verglichen werden.

**Definition 2.** Das vorkonditionierte explizite parallele Schwarz–Verfahren mit

$$K_i = D_i^{-1}, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

nennen wir **block-explizites paralleles Schwarz–Verfahren (BEPS)**.

Ziel ist es zu zeigen, daß das block-explizite parallele schneller konvergiert als das parallele Schwarz–Verfahren und für hinreichend kleine Überlappungen sogar schneller ist als das alternierende Schwarz–Verfahren. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel aus der Theorie der M–Matrizen, vergleiche [16], Kapitel 6.

**Definition 3.** Eine Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **M–Matrix**, falls

$$a_{ii} > 0 \quad \text{und} \quad a_{ij} \leq 0 \quad \text{für } i \neq j,$$

$A$  regulär ist und  $A^{-1} \geq 0$  gilt.

**Definition 4.** Eine Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **schwach diagonaldominant**, falls

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$



**Definition 5.** Eine Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt irreduzibel, falls Indizes  $1 = i_0, i_1, \dots, i_m = 1, m \in \mathbb{N}$ , existieren mit

$$a_{i_{k-1}i_k} \neq 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, m$$

und

$$\bigcup_{k=1}^m \{i_k\} = \{1, \dots, n\}.$$

**Definition 6.** Eine Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt irreduzibel diagonaldominant, falls  $A$  irreduzibel und schwach diagonaldominant ist und außerdem mindestens ein Index  $i \in \{1, \dots, n\}$  existiert mit

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}|.$$

**Satz 1.** Ist  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  irreduzibel diagonaldominant mit

$$a_{ii} > 0 \quad \text{und} \quad a_{ij} \leq 0 \quad \text{für } i \neq j,$$

so ist  $A$  eine  $M$ -Matrix mit  $A^{-1} > 0$ .

**Satz 2.** Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine  $M$ -Matrix. Bezeichnen  $J$  und  $B$  die jeweiligen Iterationsmatrizen des Jacobi- bzw. Block-Jacobi-Verfahrens, so gilt für den Spektralradius  $\rho$

$$\rho(B) \leq \rho(J) < 1.$$

Besitzt die Matrix  $A$  darüber hinaus eine positive Inverse und gilt  $J \neq B$ , so folgt

$$\rho(B) < \rho(J) < 1.$$

Mit diesen Hilfsmitteln ergibt sich der nachfolgende Satz.

**Satz 3.** Sind  $\varphi_i, \psi_i$  aus (2) positive Funktionen in  $(a_i, b_i)$  mit

$$\varphi_i(x) + \psi_i(x) \leq 1 \quad \text{für } x \in (a_i, b_i),$$

so ist  $A$  aus (8) eine  $M$ -Matrix mit positiver Inversen.

**Beweis.** Die Matrix  $A$  ist irreduzibel, denn die Indizes  $1, 3, \dots, 2p-3, 2p-2, 2p-4, \dots, 2, 1$  erfüllen die Bedingung von Definition 5. Da die weiteren Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind, ergibt sich hieraus die Behauptung.  $\square$

Aus Satz 3 in Verbindung mit Satz 2 ergibt sich die wesentliche Aussage dieses Abschnitts.

**Theorem 1.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$L(y) = f \quad \text{in } (a, b)$$

mit verschwindenden Dirichlet-Randbedingungen. Sei  $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, p\}$  eine  $p$ -überlappende Zerlegung von  $(a, b)$  und erfüllen  $\varphi_i, \psi_i$  aus (2) die Voraussetzungen von Satz 3. Bezeichnen  $J$  und  $B$  die Iterationsmatrizen des parallelen bzw. blockexpliziten parallelen Schwarz-Verfahrens, so gilt

$$\rho(B) < \rho(J) < 1.$$

Genau wie oben läßt sich zeigen, daß das alternierende Schwarz–Verfahren dem Gauß–Seidel–Verfahren zur Lösung des Gleichungssystem  $Au = f$  entspricht. Der nachfolgende Satz gibt Aufschluß über die Verringerung der Konvergenzgeschwindigkeit beim Übergang vom alternierenden zum parallelen Schwarz–Verfahren ([26], Corollar 5.2.3).

**Satz 4.** *Bezeichnen  $G$  und  $J$  die jeweiligen Iterationsmatrizen des alternierenden bzw. parallelen Schwarz–Verfahrens, so gilt*

$$\rho(G) = \rho(J)^2.$$

*Das alternierenden Schwarz–Verfahren ist folglich doppelt so schnell wie das parallele Schwarz–Verfahren.*

Wir schließen mit einer Bemerkung über die Konvergenz der Verfahren, falls zwei oder mehr Teilintervalle nicht überlappen.

**Bemerkung 1.** *Gilt  $a_{i+1} = b_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ , so ist die Matrix  $A$  aus (8) singulär, und damit hat die Iterationsmatrix  $I - A$  des Jacobi-Verfahrens den Eigenwert 1, d.h. sowohl das parallele als auch das alternierende Schwarz–Verfahren, vergleiche Satz 4, divergieren.*

### 3 Anwendung

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß das block-explizite parallele Schwarz–Verfahren bezüglich der Differentialoperatoren

$$L_1(y) = y'' \quad \text{in } (a, b)$$

und

$$L_2(y) = y'' - \kappa^2 y \quad \text{in } (a, b)$$

schneller konvergiert als das parallele Schwarz–Verfahren. Hierzu sei eine  $p$ –überlappende Zerlegung  $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, p\}$  des Intervalls  $(a, b)$  gegeben. Dann erhält man für die homogenen Differentialgleichungen, vergleiche (2), im ersten Fall die Lösungen

$$\varphi_i(x) = \frac{b_i - x}{b_i - a_i} \quad \text{und} \quad \psi_i(x) = \frac{x - a_i}{b_i - a_i} \quad \text{für } x \in (a_i, b_i)$$

und im zweiten Fall

$$\varphi_i(x) = \frac{\sinh(\kappa(b_i - x))}{\sinh(\kappa(b_i - a_i))} \quad \text{und} \quad \psi_i(x) = \frac{\sinh(\kappa(x - a_i))}{\sinh(\kappa(b_i - a_i))} \quad \text{für } x \in (a_i, b_i).$$

Da die Funktionen  $\varphi_i$  und  $\psi_i$  in beiden Fällen positiv sind und die Ungleichung  $\varphi_i(x) + \psi_i(x) \leq 1$  für  $x \in (a_i, b_i)$  erfüllen, ergibt sich unmittelbar aus Theorem 1 der folgende Satz.

**Satz 5.** Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$L_k(y) = f \quad \text{in } (a, b) \quad \text{für } k = 1, 2$$

mit verschwindenden Dirichlet-Randbedingungen. Sei  $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, p\}$  eine  $p$ -überlappende Zerlegung von  $(a, b)$ . Bezeichnen  $J_k$  und  $B_k$  die Iterationsmatrizen des parallelen bzw. block-expliziten parallelen Schwarz-Verfahrens, so gilt

$$\rho(B_k) < \rho(J_k) < 1 \quad \text{für } k = 1, 2.$$

Falls mindestens zwei Teilintervalle nicht überlappen, so haben wir im vorherigen Abschnitt gesehen, daß weder das parallele noch das alternierende Schwarz-Verfahren konvergieren. Betrachten wir nun eine gleichmäßige  $(\varepsilon, p)$ -überlappende Zerlegung des Intervalls  $(a, b)$  und verfolgen den Grenzübergang  $\varepsilon$  gegen Null. Obwohl das block-explizite parallele Schwarz-Verfahren für  $\varepsilon = 0$  nicht existiert, da die Matrix  $D_A$  in diesem Fall singulär ist, existieren dennoch die entsprechenden Iterationsmatrizen für die Differentialoperatoren  $L_1$  und  $L_2$ . Es wird sich zeigen, daß die Spektralradien dieser Matrizen auch für  $\varepsilon = 0$  kleiner als Eins sind. Aufgrund der Stetigkeit des Spektralradius bedeutet dies aber, daß für kleine Überlappungen das block-explizite parallele Schwarz-Verfahren besser ist als das entsprechende alternierende Schwarz-Verfahren. Dieser Sachverhalt wird nun in der nachfolgenden Bemerkung genauer beschrieben.

**Bemerkung 2.** Sei  $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, p\}$  eine gleichmäßige  $(\varepsilon, p)$ -überlappende Zerlegung des Intervalls  $(a, b)$ . Bezeichnen  $B_1$  und  $B_2$  die Iterationsmatrizen des block-expliziten parallelen Schwarz-Verfahrens für  $\varepsilon \rightarrow 0$  bezüglich der Differentialoperatoren  $L_1$  bzw.  $L_2$ . Dann gilt

$$\rho(B_2) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\kappa(b-a)}{p}\right)} \rho(B_1) \leq \rho(B_1) < 1.$$

Beweis. Unter der Voraussetzung der gleichmäßigen  $(\varepsilon, p)$ -überlappenden Zerlegung erhält man aus  $I - D_A^{-1}A$  mit  $A$  aus (8) für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Iterationsmatrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & R & & \\ L & 0 & R & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & L & 0 & R \\ & & & L & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2p-2) \times (2p-2)}$$

mit

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$B_2 = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\kappa(b-a)}{p}\right)} B_1.$$

Da  $\rho(\alpha C) = |\alpha| \rho(C)$  für  $\alpha \in \mathbb{C}$  und beliebige Matrizen  $C$  gilt, folgt

$$\rho(B_2) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\kappa(b-a)}{p}\right)} \rho(B_1) \leq \rho(B_1).$$

Somit genügt es zu zeigen, daß  $\rho(B_1) < 1$ . Bezeichne  $J$  die Matrix, die man aus  $B_1$  durch Streichen der ersten und letzten Zeile und Spalte erhält. Durch Entwicklung der Matrix  $\lambda I - B_1$  nach der ersten und letzten Spalte ergibt sich

$$\det(\lambda I - B_1) = \lambda^2 \det(\lambda I - J),$$

so daß

$$\rho(B_1) = \rho(J).$$

Die Matrix  $J$  ist die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens für  $C = (c_{ij}) := I - J$ . Da  $C$  mit der Indexfolge  $(1, 2, 4, \dots, 2p-4, 2p-5, 2p-7, \dots, 3, 1)$  nach Definition 5 und Definition 6 wegen  $c_{ii} = 1$  und  $c_{ij} \leq 0$  für  $i \neq j$  irreduzibel diagonaldominant ist, folgt aus Satz 1 in Verbindung mit Satz 2 die Behauptung.  $\square$

Betrachten wir nun die Differentialgleichung  $y'' = f$ . Für eine gleichmäßige  $(\varepsilon, p)$ -überlappende Zerlegung des Intervalls  $(a, b)$  wurden die Spektralradien der verschiedenen Iterationsmatrizen in Abhängigkeit von der relativen Überlappung  $z := \varepsilon/(b_1 - a_1) \in (0, 1)$  mit Hilfe von Maple numerisch berechnet und geplottet. Es stellt sich heraus (siehe die folgenden drei Abbildungen), daß das block-explizite parallele Schwarz-Verfahren insbesondere für kleine Überlappungen den anderen Verfahren überlegen ist, vergleiche Bemerkung 2.

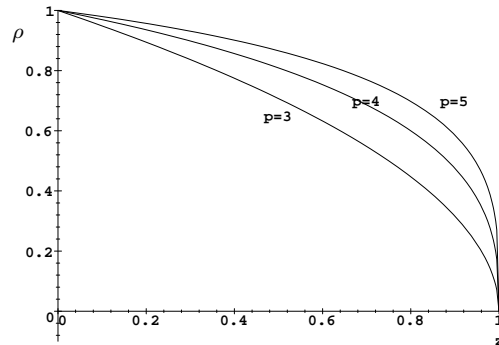


Abbildung 1: Der Spektralradius des parallelen Schwarz-Verfahrens in Abhängigkeit von der relativen Überlappung  $z$ .

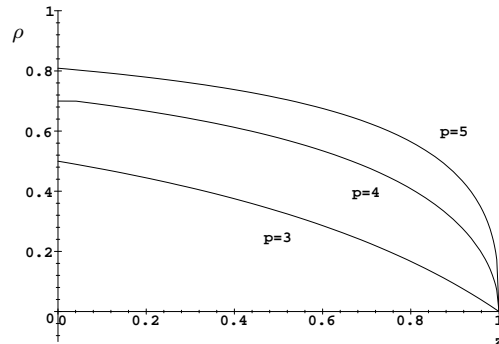


Abbildung 2: Der Spektralradius des block-expliziten parallelen Schwarz-Verfahrens in Abhängigkeit von der relativen Überlappung  $z$ .

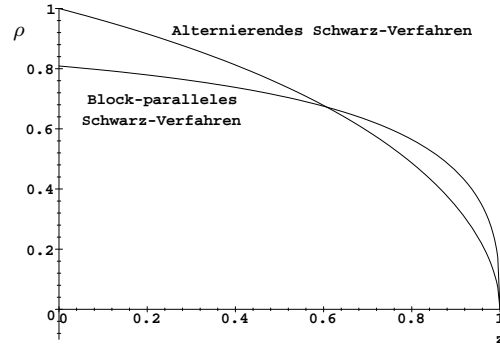


Abbildung 3: Die Spektralradien für  $p = 5$  in Abhängigkeit von der relativen Überlappung  $z$  beim alternierenden und block-expliziten parallelen Schwarz-Verfahren.

## 4 Das parallele implizite Verfahren

Im 2. Abschnitt erhielten wir das block-parallele Schwarz-Verfahren, indem wir das vorkonditionierte Gleichungssystem

$$D_A^{-1}Au = D_A^{-1}\tilde{f}$$

mit Hilfe des Jacobi-Verfahrens lösen. Da die Matrix  $D_A^{-1}A$  die Besetzungsstruktur

$$\begin{pmatrix} * & & & & & & & \\ & * & * & & & & & \\ & * & * & & * & & & \\ & * & & * & * & & & \\ & & & * & * & & & \\ & & & & * & & \ddots & * \\ & & & & & \ddots & \ddots & * \\ & & & & & & * & * \\ & & & & & & * & * \\ & & & & & & * & * \end{pmatrix}$$

hat, liegt es nahe, das Gleichungssystem mit der Zerlegung  $D_A^{-1}A = W^1 - W^2$  mit

$$W^1 = \begin{pmatrix} * & & & & & & & \\ & * & * & & & & & \\ & * & * & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & * & * & & \\ & & & & * & * & & \\ & & & & & & * & * \\ & & & & & & & * \end{pmatrix}$$

und dem Iterationsverfahren

$$W^1 u^{(n+1)} = W^2 u^{(n)} + D_A^{-1}\tilde{f}$$

zu lösen. Allgemeiner ersetzen wir nun wie im zweiten Abschnitt die Matrix  $D_A^{-1}$  durch eine reguläre Matrix  $K$  und führen eine entsprechende Zerlegung der Matrix  $KA$  durch. Hierzu definieren wir

$$D_i^1 := \begin{pmatrix} \mu_i - \alpha_i \psi_i(a_{i+1}) & 0 \\ 0 & \nu_{i+1} - \beta_{i+1} \varphi_{i+1}(b_i) \end{pmatrix}, \quad D_i^2 := \begin{pmatrix} 0 & \mu_i \varphi_{i+1}(b_i) - \alpha_i \\ \nu_{i+1} \psi_i(a_{i+1}) - \beta_{i+1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{i+1}^1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta_{i+1} \psi_{i+1}(b_i) & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{i+1}^2 := \begin{pmatrix} \mu_i \psi_{i+1}(b_i) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{i-1}^1 := \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_i \varphi_i(a_{i+1}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{i-1}^2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu_{i+1} \varphi_i(a_{i+1}) \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} K_i D_i &= D_i^1 - D_i^2 \\ K_i R_{i+1} &= R_{i+1}^1 - R_{i+1}^2 \\ K_i L_{i-1} &= L_{i-1}^1 - L_{i-1}^2. \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$W_K^1 := \begin{pmatrix} D_1^1 & R_2^1 & & \\ L_1^1 & D_2^1 & R_3^1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & L_{p-3}^1 & D_{p-2}^1 & R_{p-1}^1 \\ & & & L_{p-2}^1 & D_{p-1}^1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W_K^2 := \begin{pmatrix} D_1^2 & R_2^2 & & \\ L_1^2 & D_2^2 & R_3^2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & L_{p-3}^2 & D_{p-2}^2 & R_{p-1}^2 \\ & & & L_{p-2}^2 & D_{p-1}^2 \end{pmatrix}$$

gilt schließlich

$$KA = W_K^1 - W_K^2,$$

wobei  $W_K^1$  die geforderte Struktur besitzt, so daß die Iterierten des induzierten Verfahrens

$$W_K^1 u^{(n+1)} = W_K^2 u^{(n)} + K \tilde{f}$$

leicht zu bestimmen sind. Für die Komponenten  $u_i^{(n)}$  von  $u^{(n)}$  ist dies gleichbedeutend mit

$$L_{i-1}^1 u_{i-1}^{(n+1)} + D_i^1 u_i^{(n+1)} + R_{i+1}^1 u_{i+1}^{(n+1)} = L_{i-1}^2 u_{i-1}^{(n)} + D_i^2 u_i^{(n)} + R_{i+1}^2 u_{i+1}^{(n)} + K_i \tilde{f}_i.$$

Folglich lautet die erste Zeile dieser Gleichung

$$\begin{aligned} & \mu_i y_i^{(n+1)}(b_i) - \alpha_i \varphi_i(a_{i+1}) y_i^{(n+1)}(a_i) - \alpha_i \psi_i(a_{i+1}) y_i^{(n+1)}(b_i) - \alpha_i h_i(a_{i+1}) \\ &= \mu_i \varphi_{i+1}(b_i) y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}) + \mu_i \psi_{i+1}(b_i) y_{i+1}^{(n)}(b_{i+1}) + \mu_i h_{i+1}(b_i) - \alpha_i y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (3)

$$\mu_i y_i^{(n+1)}(b_i) - \alpha_i y_i^{(n+1)}(a_{i+1}) = \mu_i y_{i+1}^{(n)}(b_i) - \alpha_i y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}).$$

Analog ergibt sich aus der zweiten Zeile

$$\nu_{i+1} y_{i+1}^{(n+1)}(a_{i+1}) - \beta_{i+1} y_{i+1}^{(n+1)}(b_i) = \nu_{i+1} y_i^{(n)}(a_{i+1}) - \beta_{i+1} y_i^{(n)}(b_i).$$

Da die neuen Werte  $y_i^{(n+1)}(b_i)$  und  $y_i^{(n+1)}(a_i)$  nicht explizit gegeben sind, erhalten wir insgesamt das **vorkonditionierte implizite parallele Schwarz-Verfahren**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L(y_i^{(n+1)}) & = & f \quad \text{in } (a_i, b_i) \\ \nu_i y_i^{(n+1)}(a_i) - \beta_i y_i^{(n+1)}(b_{i-1}) & = & \nu_i y_{i-1}^{(n)}(a_i) - \beta_i y_{i-1}^{(n)}(b_{i-1}) \\ \mu_i y_i^{(n+1)}(b_i) - \alpha_i y_i^{(n+1)}(a_{i+1}) & = & \mu_i y_{i+1}^{(n)}(b_i) - \alpha_i y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}) \\ & \text{für } i = 1, \dots, p \end{array} \right\} \quad (\mathbf{KIPS}),$$

wobei  $\nu_1 = \mu_p = 1$ ,  $\beta_1 = \alpha_p = 0$  und  $y_0^{(n)}(a_1) = y_{p+1}^{(n)}(b_p) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Auch hier sollte man betonen, daß der Kommunikationsaufwand bei der Implementierung von KIPS gegenüber der Methode PS nicht steigt, da ausschließlich Linearkombinationen der verschiedenen Randwerte von benachbarten Intervallen ausgetauscht werden.

**Bemerkung 3.** Da KIPS für  $\nu_i = 0$  bzw.  $\mu_i = 0$  nicht konvergiert, können wir  $\nu_i = \mu_i = 1$  für  $i = 1, \dots, p$  annehmen.

**Definition 7.** Das vorkonditionierte implizite parallele Schwarz-Verfahren mit

$$K_i = D_i^{-1}, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

nennen wir **block-implizites paralleles Schwarz-Verfahren (BIPS)**.

Wir werden nun das block-implizite mit dem block-expliziten parallelen Schwarz-Verfahren vergleichen. Hierzu erweisen sich die folgenden Lemmata, vergleiche [1], Kapitel 6, als nützlich.

**Lemma 1.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine  $M$ -Matrix und  $B = (b_{ij}) \geq A$  mit  $b_{ij} \leq 0$  für  $i \neq j$ . Dann ist auch  $B$  eine  $M$ -Matrix.

**Lemma 2.** Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $a_{ij} \leq 0$  für  $i \neq j$ . Dann gilt:  $A$  ist  $M$ -Matrix genau dann, wenn  $Ax > 0$  für ein positives  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Satz 6.** Sei  $A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$  eine  $M$ -Matrix mit Blockstruktur und  $D$  die Blockdiagonale, d.h.  $D = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{mm})$ . Dann ist auch  $D^{-1}A$  eine  $M$ -Matrix.

**Beweis.** Sei  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) := D^{-1}A$ . Nach Lemma 1 ist mit  $A$  auch  $D$  eine  $M$ -Matrix. Folglich gilt  $D^{-1} \geq 0$ , so daß  $\tilde{a}_{ij} \leq 0$  für  $i \neq j$ . Weiter existiert mit Hilfe von Lemma 2 ein positiver Vektor  $x$  mit  $Ax > 0$ . Weil  $D^{-1} \geq 0$  regulär ist, gibt es in jeder Zeile von  $D^{-1}$  mindestens einen positiven Eintrag, so daß auch  $D^{-1}Ax > 0$ . Hieraus folgt schließlich mit Lemma 2 die Behauptung.  $\square$

Wir kommen nun zur wesentlichen Aussage dieses Paragraphen.

**Theorem 2.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$L(y) = f \quad \text{in } (a, b)$$

mit verschwindenden Dirichlet-Randbedingungen. Sei  $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, p\}$  eine  $p$ -überlappende Zerlegung von  $(a, b)$  und erfüllen  $\varphi_i, \psi_i$  aus (2) die Voraussetzungen von Satz 3. Bezeichnen  $J$ ,  $B_e$  und  $B_i$  die Iterationsmatrizen des parallelen, block-expliziten und block-impliziten parallelen Schwarz-Verfahrens, so gilt

$$\rho(B_i) \leq \rho(B_e) < \rho(J) < 1.$$

Beweis. Das block-explizite parallele Schwarz–Verfahren entspricht dem Block–Jacobi–Verfahren bezüglich der Matrix  $A$  mit  $A$  aus (8), bzw. dem Jacobi–Verfahren bezüglich der Matrix  $\tilde{A} := D_A^{-1}A$  mit  $D_A^{-1}$  aus (9). Nun entspricht aber das block-implizite parallele Schwarz–Verfahren dem Block–Jacobi–Verfahren bezüglich  $\tilde{A}$ . Da nach Satz 6 mit  $A$  auch  $\tilde{A}$  eine M–Matrix ist, folgt die Behauptung aus Satz 2 und Theorem 1.  $\square$

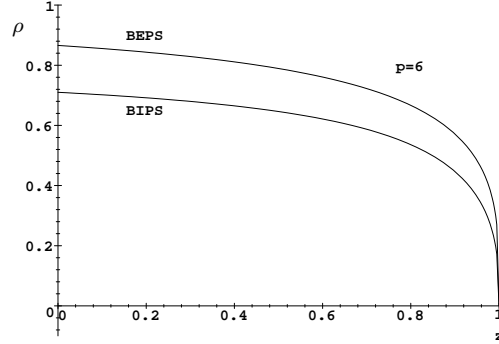


Abbildung 4: Die Spektralradien für  $p = 6$  in Abhängigkeit von der relativen Überlappung  $z$  beim expliziten und impliziten block-parallelen Schwarz–Verfahren.

## 5 Verallgemeinerung des parallelen Schwarz–Verfahrens

Das parallele Schwarz–Verfahren tauscht an den Rändern der Intervalle  $(a_i, b_i)$  stets Randwerte aus, also die Funktionswerte an den Stellen  $a_i$  und  $b_i$ , so daß die Teillösungen mit Hilfe von Dirichlet–Randbedingungen berechnet werden. Möglich sind aber z.B. auch Neumann– oder gemischte Randbedingungen. Dies führt dann auf das verallgemeinerte parallele Schwarz–Verfahren (**VPS**)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L(y_i^{(n+1)}) & = & f \text{ in } (a_i, b_i) \\ L_i^l(y_i^{(n+1)})(a_i) & = & L_i^l(y_{i-1}^{(n)})(a_i) \\ L_i^r(y_i^{(n+1)})(b_i) & = & L_i^r(y_{i+1}^{(n)})(b_i) \\ & \text{für } i = 1, \dots, p \end{array} \right\} \quad (\text{VPS}),$$

wobei  $L_1^l = L_p^r = 0$  und  $L_{i+1}^l, L_i^r$  für  $i = 1, \dots, p-1$  geeignete lineare Operatoren darstellen, die für die Funktionen aus (2) definiert sind. Für den Spezialfall des parallelen Schwarz–Verfahrens ist

$$L_{i+1}^l(y) = L_i^r(y) = y.$$

Neumann–Randbedingungen werden z.B. durch

$$L_{i+1}^l(y) = y' \quad \text{und} \quad L_i^r(y) = -y'$$

charakterisiert. Weitere Beispiele befinden sich in [11] und [25].

Ziel ist es nun zu zeigen, daß die Verfahren KIPS und VPS äquivalent sind.



**Satz 7.** *Jedes KIPS ist ein VPS.*

Beweis. An den Endpunkten des Intervalls stimmen beide Verfahren nach ihrer Definition überein. Somit erhält man mit

$$\begin{aligned} L_i^l(u)(x) &:= \nu_i u(x) - \beta_i u(x - a_i + b_{i-1}), \quad i = 2, \dots, p, \\ L_i^r(u)(x) &:= \mu_i u(x) - \alpha_i u(x - b_i + a_{i+1}), \quad i = 1, \dots, p-1, \end{aligned}$$

aus VPS das KIPS.  $\square$

Zum Beweis der Umkehrung benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.** *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$L(y) = f \quad \text{in } (a, b),$$

*die auf jedem Teilintervall eindeutig mit Dirichlet-Randbedingungen lösbar ist. Sei  $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, p\}$  eine  $p$ -überlappende Zerlegung von  $(a, b)$  und seien  $\varphi_i, \psi_i$  die Funktionen aus (2) mit  $\varphi_i(a_{i+1}) \neq 0$  und  $\psi_{i+1}(b_i) \neq 0$ . Weiter sei  $\tilde{L}$  ein linearer Operator, der für die Funktionen  $\varphi_i$  und  $\psi_i$  definiert ist. Dann gilt für  $i = 1, \dots, p-1$*

$$\begin{aligned} \frac{\psi_i(a_{i+1})}{\varphi_i(a_{i+1})} \tilde{L}(\varphi_i) + \frac{1}{\psi_{i+1}(b_i)} \tilde{L}(\psi_{i+1}) &= \tilde{L}(\psi_i) \\ \frac{\varphi_{i+1}(b_i)}{\psi_{i+1}(b_i)} \tilde{L}(\psi_{i+1}) + \frac{1}{\varphi_i(a_{i+1})} \tilde{L}(\varphi_i) &= \tilde{L}(\varphi_{i+1}) \\ \frac{h_i(a_{i+1})}{\varphi_i(a_{i+1})} \tilde{L}(\varphi_i) - \frac{h_{i+1}(b_i)}{\psi_{i+1}(b_i)} \tilde{L}(\psi_{i+1}) &= \tilde{L}(h_i) - \tilde{L}(h_{i+1}) \end{aligned}$$

*im Überlappungsbereich  $[a_{i+1}, b_i]$ .*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Identität, da die anderen analog bewiesen werden können. Aufgrund der Linearität von  $\tilde{L}$ , genügt es zu zeigen, daß

$$\frac{\psi_i(a_{i+1})}{\varphi_i(a_{i+1})} \varphi_i(x) + \frac{1}{\psi_{i+1}(b_i)} \psi_{i+1}(x) = \psi_i(x) \quad \forall x \in [a_{i+1}, b_i]$$

für  $i = 1, \dots, p-1$  gilt. Für die Randwerte  $a_{i+1}$  und  $b_i$  ergibt sich die Gleichheit unmittelbar aus den Definitionen der Funktionen  $\varphi_i, \psi_i$  und  $\psi_{i+1}$ . Da

$$L\left(\frac{\psi_i(a_{i+1})}{\varphi_i(a_{i+1})} \varphi_i + \frac{1}{\psi_{i+1}(b_i)} \psi_{i+1}\right) = L(\psi_i) \quad \text{in } [a_{i+1}, b_i]$$

gilt, folgt die Behauptung aus der Voraussetzung an den Operator  $L$ .  $\square$

Wir schließen diesen Bericht mit einer Aussage über die Äquivalenz der Verfahren KIPS und VPS.

**Theorem 3.** *Gegeben sei die lineare Differentialgleichung*

$$L(y) = f \quad \text{in } (a, b)$$

*mit verschwindenden Dirichlet-Randbedingungen. Sei  $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, p\}$  eine  $p$ -überlappende Zerlegung von  $(a, b)$  und erfüllen  $\varphi_i, \psi_i$  aus (2) die Voraussetzungen  $\varphi_i(a_{i+1}) \neq 0$  und  $\psi_{i+1}(b_i) \neq 0$  für  $i = 1, \dots, p-1$ . Dann sind KIPS und VPS äquivalent.*

Beweis. Da an den Intervallenden  $a$  und  $b$  die Verfahren übereinstimmen und Satz 7 den ersten Teil des Theorems beweist, wollen wir die Werte für  $\mu_i, \nu_i, \alpha_i$  und  $\beta_i$  angeben, für welche das KIPS das VPS darstellt. Setze hierzu

$$\mu_i = \frac{L_i^r(\psi_{i+1})(b_i)}{\psi_{i+1}(b_i)}, \quad \alpha_i = -\frac{L_i^r(\varphi_i)(b_i)}{\varphi_i(a_{i+1})}$$

und

$$\nu_{i+1} = \frac{L_{i+1}^l(\varphi_i)(a_{i+1})}{\varphi_i(a_{i+1})}, \quad \beta_{i+1} = -\frac{L_{i+1}^l(\psi_{i+1})(a_{i+1})}{\psi_{i+1}(b_i)}$$

für  $i = 1, \dots, p-1$ . Nun folgt aus

$$\mu_i y_i^{(n+1)}(b_i) - \alpha_i y_i^{(n+1)}(a_{i+1}) = \mu_i y_{i+1}^{(n)}(b_i) - \alpha_i y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}).$$

des KIPS mit Hilfe von (3) die Gleichung

$$\begin{aligned} & (\mu_i - \alpha_i \psi_i(a_{i+1})) y_i^{(n+1)}(b_i) - \alpha_i \varphi_i(a_{i+1}) y_i^{(n+1)}(a_i) - \alpha_i h_i(a_{i+1}) \\ &= (\mu_i \varphi_{i+1}(b_i) - \alpha_i) y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}) + \mu_i \psi_{i+1}(b_i) y_{i+1}^{(n)}(b_{i+1}) + \mu_i h_{i+1}(b_i). \end{aligned}$$

Mit den Definitionen von  $\mu_i$  und  $\alpha_i$  ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\psi_i(a_{i+1})}{\varphi_i(a_{i+1})} L_i^r(\varphi_i)(b_i) + \frac{1}{\psi_{i+1}(b_i)} L_i^r(\psi_{i+1})(b_i) \right) y_i^{(n+1)}(b_i) \\ & \quad + L_i^r(\varphi_i)(b_i) y_i^{(n+1)}(a_i) + \frac{h_i(a_{i+1})}{\varphi_i(a_{i+1})} L_i^r(\varphi_i)(b_i) \\ &= \left( \frac{\varphi_{i+1}(b_i)}{\psi_{i+1}(b_i)} L_i^r(\psi_{i+1})(b_i) + \frac{1}{\varphi_i(a_{i+1})} L_i^r(\varphi_i)(b_i) \right) y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}) \\ & \quad + L_i^r(\psi_{i+1})(b_i) y_{i+1}^{(n)}(b_{i+1}) + \frac{h_{i+1}(b_i)}{\psi_{i+1}(b_i)} L_i^r(\psi_{i+1})(b_i) \end{aligned}$$

Nach Lemma 3 erhält man hieraus

$$\begin{aligned} & L_i^r(\psi_i)(b_i) y_i^{(n+1)}(b_i) + L_i^r(\varphi_i)(b_i) y_i^{(n+1)}(a_i) + L_i^r(h_i)(b_i) \\ &= L_i^r(\varphi_{i+1})(b_i) y_{i+1}^{(n)}(a_{i+1}) + L_i^r(\psi_{i+1})(b_i) y_{i+1}^{(n)}(b_{i+1}) + L_i^r(h_{i+1})(b_i) \end{aligned}$$

und somit die Gleichung

$$L_i^r(y_i^{(n+1)})(b_i) = L_i^r(y_{i+1}^{(n)})(b_i)$$

des VPS. Entsprechend ergibt sich die Äquivalenz der zweiten Randbedingung.  $\square$

## 6 Ausblick

Die vorgestellte Analyse des parallelen Schwarz-Verfahrens beruht auf der Darstellung der allgemeinen Lösung gewisser gewöhnlicher Differentialgleichungen mit den

Randwerten als Parametern. Mit Hilfe dieser Darstellungen wurde ein Gleichungssystem für die Lösung der gegebenen Differentialgleichung in den Randpunkten der überlappenden Teilintervalle hergeleitet und mit verschiedenen beschleunigten Jacobi-Verfahren gelöst. Die Vorkonditionierungen wurden dann als gekoppelte Randbedingungen für die Differentialgleichungen in den Teilintervallen gedeutet. Verwendet man anstelle der allgemeinen Lösungen der Teilprobleme Näherungslösungen, so erhält man im eindimensionalen Fall analoge Ergebnisse.

Im mehrdimensionalen Fall führt die vorgestellte Methode auf Systeme von Integralgleichungen, die nur auf den Rändern der Teilgebiete iterativ gelöst werden müssen (*Randintegralmethode*). Eine solche Analyse ist zwar sehr aufwendig, würde jedoch wie im eindimensionalen Fall konvergenzbeschleunigende Kopplungen für die Randwerte der Teilprobleme liefern. Dennoch lassen sich die in diesem Bericht beschriebenen Methoden auf den mehrdimensionalen diskreten Fall anwenden. Ansatzpunkte liefern z.B. die Diskretisierungen der Randbedingungen im verallgemeinerten parallelen Schwarz-Verfahren, bzw. die Kopplung benachbarter Randpunkte, die zu verschiedenen Gebieten gehören.

Abschließend soll noch bemerkt werden, daß die vorgestellten Verfahren auch als Vorkonditionierungsstrategien bei iterativen Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, die bei der Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen entstehen, benutzt werden können, wie z.B. dem Verfahren der konjugierten Gradienten [17] oder der Methode der quasi-minimalen Residuen [12]. In beiden Fällen müssen die Matrix-Vektor-Produkte mit der Technik der Gebietszerlegung auf die einzelnen Prozessoren verteilt werden, so daß der hierdurch entstehende Datenaustausch durch die Gebietszerlegung bestimmt wird. Die angedeuteten Methoden sind dann als Vorkonditionierungsstrategien in parallelen Varianten der iterativen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme [3, 9] einsetzbar.

## 7 Danksagung

Die Autoren danken ihren Kollegen Herrn Hanns Martin Bucker und Herrn Dr. Peter Weidner für hilfreiche Hinweise, die zur Verbesserung der Darstellung dieses Berichtes beitrugen.

## Literatur

- [1] O. Axelsson. *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, 1994.
- [2] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, and J. Xu. Parallel Multilevel Preconditioners. *Math. Comp.*, 55(191):1–22, 1990.
- [3] H. M. Bucker and M. Sauren. A Parallel Version of the Unsymmetric Lanczos Algorithm and its Application to QMR. Internal Report KFA-ZAM-IB-9605, Research Centre Jülich, Jülich, Germany, March 1996.
- [4] X.-C. Cai. Additive Schwarz algorithms for parabolic convection-diffusion equations. *Numer. Math.*, 60:41–61, 1991.

- [5] X.-C. Cai, W.D. Gropp, and D.E. Keyes. Convergence rate estimate for a domain decomposition method. *Numer. Math.*, 61:153–169, 1992.
- [6] T.F. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, and O.B. Widlund, editors. *Domain Decomposition Methods*, in Second International Symposium on Domain Decomposition Methods. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1989.
- [7] T.F. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, and O.B. Widlund, editors. *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1990.
- [8] T.F. Chan and J.P. Shao. Parallel complexity of domain decomposition methods and optimal coarse grid size. *Parallel Computing*, 21:1033–1049, 1995.
- [9] J. W. Demmel, M. T. Heath, and H. A. van der Vorst. Parallel Numerical Linear Algebra. In *Acta Numerica 1993*, pages 111–197. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [10] M. Dryja and O.B. Widlund. Domain Decomposition Algorithms with Small Overlap. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(3):604–620, 1994.
- [11] B. Engquist and K.-H. Zhao. Analysis of Generalized Schwarz Alternating Procedure for Domain Decomposition. In *Proceedings of the Copper Mountain Conference on Iterative Methods*. SIAM, April 9-13 1996.
- [12] R. W. Freund and N. M. Nachtigal. QMR: A Quasi-Minimal Residual Method for Non-Hermitian Linear Systems. *Numer. Math.*, 60:315–339, 1991.
- [13] R. Glowinski, G.H. Golub, G.A. Meurant, and J. Périaux, editors. *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1988.
- [14] R. Glowinski, Y.A. Kuznetsov, G. Meurant, J. Périaux, and O.B. Widlund, editors. *Fourth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1991.
- [15] M. Griebel. *Multilevelmethoden als Iterationsverfahren über Erzeugendensystemen*. Teubner Skripten zur Numerik. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [16] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [17] M. Hestenes and E. Stiefel. Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49:409–436, 1952.

- [18] D.E. Keyes, T.F. Chan, G. Meurant, J.S. Scroggs, and R.G. Voigt, editors. *Fifth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.
- [19] D.E. Keyes and J. Xu, editors. *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, volume 180 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, 1994. Proceedings of the Seventh International Conference on Domain Decomposition.
- [20] P.L. Lions. On the Schwarz Alternating Method. I. *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, pages 1–42, 1988.
- [21] P.L. Lions. On the Schwarz Alternating Method III: A Variant for Nonoverlapping Subdomains. *Proceedings of Third International conference on Domain Decomposition Methods*. SIAM, Philadelphia, pages 202–223, 1990.
- [22] A. Quarteroni, J. Périaux, Y.A. Kuznetsov, and O.B. Widlund, editors. *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, volume 157 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, 1993. The Sixth International Conference on Domain Decomposition.
- [23] H.A. Schwarz. Über einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15:272–286, 1870.
- [24] K.H. Tan and M.J.A. Borsboom. On Generalized Schwarz Coupling Applied to Advection-Dominated Problems. In Keyes and Xu [19], pages 125–130. Proceedings of the Seventh International Conference on Domain Decomposition.
- [25] W.P. Tang. Generalized Schwarz Splittings. *SIAM J.Sci.Stat.Comput.*, 13(2):573–595, 1992.
- [26] D.M. Young. *Iterative Solution of Large Linear Systems*. Academic Press, 1971.